

Isomorfismi tra i modelli

Oggetto di questa sezione è lo studio degli isomorfismi esistenti fra i vari modelli di piano assoluto: il modello di Klein, del semipiano superiore di Poincaré e del disco di Poincaré.

È pertanto opportuno premettere la seguente

Definizione 0.1. Chiamiamo *isomorfismo tra piani assoluti* ogni bijezione fra i rispettivi insiemi di punti che conservi gli allineamenti, conservi (o inverta) l'ordinamento e conservi la congruenza.

0.1 Isomorfismo tra i modelli di Poincaré

Cominciamo col costruire un possibile isomorfismo tra i due modelli di Poincaré: il semipiano superiore, che indicheremo con \mathcal{H}_P e il disco, che chiameremo \mathcal{D}_P .

Tale isomorfismo si può realizzare mediante un'opportuna inversione circolare. Dimostriamo quindi un teorema fondamentale che ci autorizza a considerare l'inversione circolare atta per instaurare un isomorfismo tra i modelli, alla luce della definizione (0.1).

Teorema 0.2. *Ogni inversione circolare è una trasformazione conforme, cioè conserva le ampiezze degli angoli, pur invertendone l'orientazione.*

Dimostrazione. Per questa dimostrazione ricorreremo alla già impiegata notazione complessa. In particolare, ricordiamo che un'inversione circolare è riconducibile alla composizione delle due applicazioni

$$z \mapsto \frac{1}{z} \quad \text{e} \quad z \mapsto \bar{z}.$$

La seconda delle due applicazioni, il coniugio, che rappresenta la simmetria rispetto all'asse delle ascisse, conserva ovviamente gli angoli, ma ne inverte l'orientazione.

Resta pertanto da vedere che l'applicazione $\{z \mapsto 1/z\}$ conserva gli angoli.

Risulta infatti

$$\frac{1}{z + \delta e^{i\vartheta}} - \frac{1}{z} = \frac{-\delta e^{i\vartheta}}{z(z + \delta e^{i\vartheta})} \simeq \frac{-\delta e^{i\vartheta}}{z^2},$$

ogniqualevolta δ è sufficientemente piccolo.

Cioè, quando $z + \delta e^{i\vartheta}$ approssima z lungo la direzione ϑ , $\frac{1}{z + \delta e^{i\vartheta}}$ approssima $\frac{1}{z}$ nella direzione $\vartheta + \pi + \arg(z^{-2})$ (in cui $\arg(z^{-2})$ indica l'anomalia del numero z^{-2}), che altro non è che $\vartheta + \text{costante}$.

Ciò mostra che l'angolo tra due differenti direzioni è mantenuto. □

Ricordiamo altresì dei risultati già dimostrati (nel piano di Moebius) quando venne introdotta l'inversione circolare. Ossia, un'inversione circolare è una trasformazione che conserva la famiglia delle rette e delle circonferenze euclidee, che sono proprio i tipi di rette definite nei due modelli di Poincaré ora in oggetto.

Pertanto siamo pronti per descrivere l'isomorfismo tra i due modelli.

Teorema 0.3. *L'isomorfismo tra i due modelli di Poincaré si realizza tramite l'inversione circolare di centro $-i$ e potenza 2, ossia $\Omega_{-i}^{\sqrt{2}}$.*

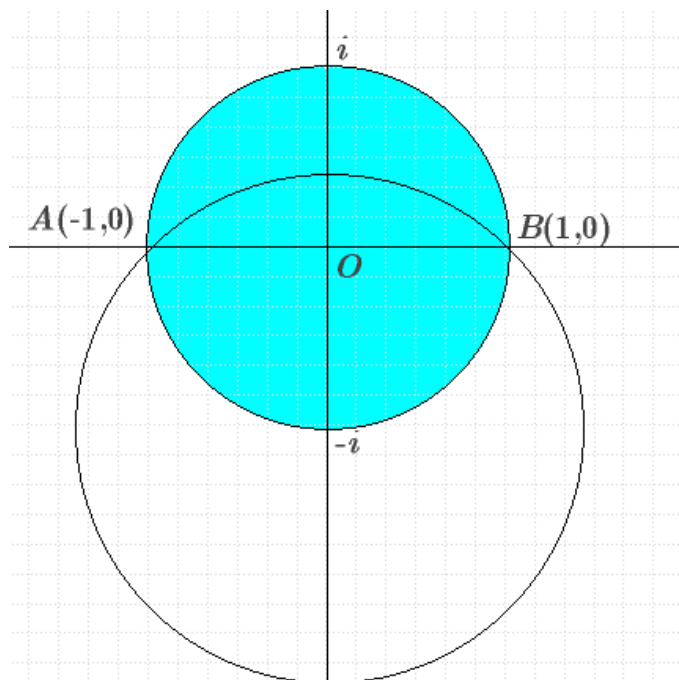
Più precisamente, l'isomorfismo η cercato risulta così definito:

$$\eta := \Omega_{-i}^{\sqrt{2}} = \tau_{-i} \circ \Omega_0^{\sqrt{2}} \circ \tau_i,$$

(ove $\Omega_0^{\sqrt{2}}$ è l'inversione di centro 0 e potenza 2 e τ_{-i} e τ_i sono le traslazioni rispettivamente di vettori $-i$ e i). In termini analitici, tale isomorfismo ha la seguente espressione

$$\eta := \begin{cases} \mathcal{D}_P & \longrightarrow & \mathcal{H}_P \\ z & \longmapsto & z' = \frac{-i\bar{z} + 1}{\bar{z} - i} \end{cases}$$

Dimostrazione. Cerchiamo di capire l'azione dell'inversione circolare di centro $-i$ e potenza 2. Ci serviamo pertanto della figura proposta.



Il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 rappresenta il disco di Poincaré, mentre il cerchio di centro $C = -i$ passante per i punti $A(-1,0)$, identificato col numero complesso -1 e $B(1,0)$, identificato con 1 , è invece il cerchio d'inversione di potenza 2.

Osserviamo anzitutto che la retta AB , che è l'asse reale, si trasforma tramite l'inversione circolare nella circonferenza che definisce il bordo del disco di Poincaré. Al contrario tale circonferenza si muta nell'asse reale. In particolare i punti dell'arco superiore AB del disco si trasformano nei punti del segmento \overline{AB} dell'asse reale, i punti dell'arco inferiore si mutano nel complementare del segmento \overline{AB} .

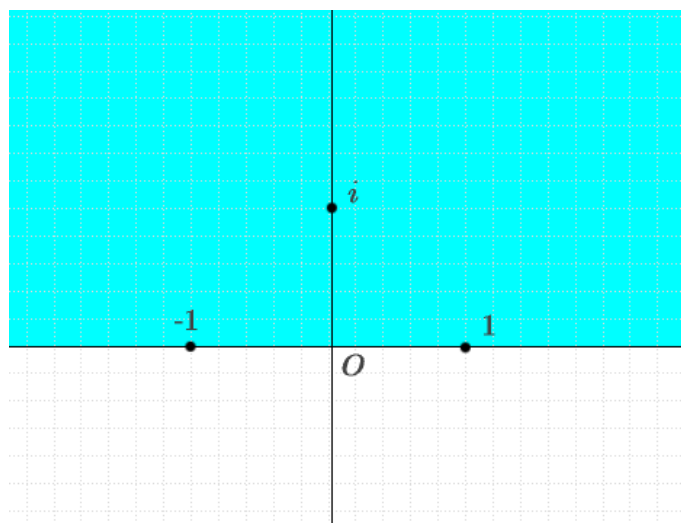
Consideriamo ora i punti del disco al di sopra dell'arco AB del cerchio d'inversione. Essi si scambiano con i punti delimitati dal segmento \overline{AB} (trasformato dall'arco AB del disco) e dall'arco AB del cerchio d'inversione (unito nella trasformazione). Restano da considerare i punti del disco situati nel semipiano negativo del piano di Moebius. Essi vengono mandati tramite l'inversione nel semipiano superiore del piano di Moebius esterni al disco.

Infine, i punti $i, -i, 0$ vengono mandati rispettivamente nei punti $0, \infty$ e i .

In definitiva, possiamo affermare che una tale inversione circolare trasforma il disco di Poincaré nel semipiano superiore di Poincaré, rispettando i relativi bordi. Ossia, il disco si trasforma nella parte evidenziata nella figura proposta in seguito. Ovviamente le rette del modello del disco, che sono gli archi di circonferenze ortogonali al bordo del disco, si trasformeranno, come già osservato, opportunamente in semirette verticali o semicirconferenze ortogonali all'asse reale (che è il trasformato del bordo del disco), le rette del secondo modello.

Ci resta solamente da verificare l'espressione analitica della η .

È facile convincersi che l'inversione di centro $-i$ e potenza 2 si ottenga tramite la



composizione già illustrata.

Dobbiamo solo ricavarne l'espressione.

Ricordando l'espressione dell'inversione circolare data nel paragrafo (5.3), si ha, nel nostro caso,

$$\Omega_0^{\sqrt{2}}(w) = \frac{2}{w}.$$

Quindi, preso $z \in \mathbb{C}$, applichiamo dapprima τ_i , ottenendo che

$$z \mapsto z + i.$$

A questo punto applichiamo l'inversione $\Omega_0^{\sqrt{2}}$ (ricordando altresì che il coniugio è un automorfismo nel campo complesso):

$$z + i \mapsto \frac{2}{z + i} = \frac{2}{\bar{z} - i}.$$

Infine, applicando τ_{-i} , si ottiene che

$$\frac{2}{\bar{z} - i} \mapsto \frac{2}{\bar{z} - i} - i.$$

L'azione della composizione di queste tre funzioni dà il seguente risultato:

$$z \mapsto \frac{-i\bar{z} + 1}{\bar{z} - i},$$

che è quanto volevamo dimostrare. \square

0.2 Isomorfismo tra il disco di Poincaré e il modello di Klein

Per stabilire l'isomorfismo tra i due modelli in questione dovremo ricorrere alla proiezione stereografica e alle sue proprietà.

Enunciamo pertanto una serie di risultati.

Ricordiamo anzitutto che una proiezione stereografica, come già dimostrato nel paragrafo (5.6), muta circonferenze sulla sfera S^2 in circonferenze e rette del piano \mathbb{R}^2 , in particolare vengono mutate in rette le circonferenze passanti per il polo nord.

E tale proprietà viene a nostro favore, in quanto rette e circonferenze sono protagoniste nei due modelli in considerazione.

Vale anche per la proiezione stereografica, cosiccome per l'inversione circolare, un teorema sulla conservazione degli angoli.

Teorema 0.4. *La proiezione stereografica è una trasformazione conforme, conserva cioè gli angoli.*

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità computazionale la sfera di centro l'origine e raggio 1

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Il piano π di proiezione sia il piano xy : ciò non compromette la validità della dimostrazione, infatti, tramite un'opportuna omotetia ci si può ricondurre ad un qualsiasi altro piano parallelo al piano xy .

Chiamiamo $P(x, y, z)$ (con $z^2 = 1 - x^2 - y^2$) il generico punto sulla sfera, $P'(X, Y, 0)$

il proiettato.

La retta OP' avrà equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = Xt \\ y = Yt \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Si ottengono le coordinate del punto P di incontro con la sfera mettendo a sistema l'equazione della sfera con la (1): sostituendo nell'equazione della sfera le equazioni della (1), si ha

$$X^2t^2 + Y^2t^2 + 1 - 2t + t^2 = 1,$$

da cui, semplificando, si ricava

$$t = \frac{2}{X^2 + Y^2 + 1}.$$

Sostituendo nelle (1) si ha infine

$$\begin{cases} x = \frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1} \\ y = \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1} \\ z = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} \end{cases}. \quad (2)$$

Dopo questa dovuta ambientazione, procediamo ora nell'effettiva dimostrazione del teorema.

Assumiamo come piano $y = 0$ il piano che contiene i due punti corrispondenti P e P' in considerazione e siano $(a, 0)$ le coordinate di P' sul piano $\pi = xy$.

Detti m ed n i coseni direttori (si avrà dunque $m^2 + n^2 = 1$) della tangente ad una curva \mathcal{C}' che passa per P' , le equazioni di tale tangente sono

$$\begin{cases} X = a + mt \\ Y = nt \end{cases}. \quad (3)$$

Sostituiamo nelle (2) le espressioni (3), si ha

$$\begin{cases} x = \frac{2(a + mt)}{a^2 + 1 + 2amt} \\ y = \frac{2nt}{a^2 + 1 + 2amt} \\ z = \frac{a^2 - 1 + 2amt}{a^2 + 1 + 2amt} \end{cases} . \quad (4)$$

Le precedenti espressioni si sono ottenute trascurando i termini in t^2 , dando luogo ad una sorta di linearizzazione. Tale procedimento è lecito ogniqualvolta si supponga t molto piccolo, ossia tendente a zero. Sotto quest'ultima ipotesi, l'equazione della retta tangente tende alle coordinate del punto P' . Questo evidenzia l'interesse per un'indagine di tipo locale, ossia in un opportuno intorno del punto in questione, ai fini di dimostrare che gli angoli si conservano.

Osserviamo inoltre, a conferma di quanto affermato, che le (4), visti i passaggi algebrici da cui derivano, dovrebbero rappresentare le equazioni parametriche della proiezione della retta tangente (3) sulla sfera, ossia le equazioni parametriche di una circonferenza. Invece, in seguito alla linearizzazione (che tende ad approssimare la retta col punto), sono rappresentative di una retta (ossia, l'approssimante la circonferenza).

Procediamo nella dimostrazione. A meno di infinitesimi di ordine superiore al secondo, si ha

$$\frac{1}{a^2 + 1 + 2amt} = \frac{a^2 + 1 - 2amt}{(a^2 + 1)^2}. \quad (5)$$

La verifica è immediata: si ha, riducendo ad un unico denominatore la precedente scrittura,

$$\frac{a^4 + 1 + 2a^2 - a^4 - 1 - 2a^2 + 4a^2m^2t^2}{(a^2 + 1 + 2amt)(a^2 + 1)^2},$$

che, trascurando il termine in t^2 , tende effettivamente a 0.

Procediamo ora, grazie alla (5), alla riscrittura delle (4), trascurando nuovamente i termini in t^2 .

Si ha

$$x = \frac{2(a + mt)}{a^2 + 1 + 2amt} = \frac{2(a + mt)(a^2 + 1 - 2amt)}{(a^2 + 1)^2} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{2a(a^2 + 1) + 2a(-2amt) + 2mt(a^2 + 1) + 2mt(-2amt)}{(a^2 + 1)^2} = \\ & = \frac{2a}{a^2 + 1} - \frac{2mt(1 - a^2)}{(a^2 + 1)^2} - \frac{4m^2at^2}{(a^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

che trascurando t^2 diviene

$$x = \frac{2a}{a^2 + 1} + \frac{2(1 - a^2)mt}{(a^2 + 1)^2}.$$

In modo analogo si trova che

$$y = \frac{2nt}{a^2 + 1}.$$

Per quanto riguarda z si ha

$$\begin{aligned} z &= \frac{a^2 - 1 + 2amt}{a^2 + 1 + 2amt} = \frac{(a^2 - 1 + 2amt)(a^2 + 1 - 2amt)}{(a^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(a^2 - 1)(a^2 + 1) + 2amt(a^2 + 1 - a^2 + 1) - 4a^2m^2t^2}{(a^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{4amt}{(a^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

In definitiva le (4) divengono

$$\begin{cases} x = \frac{2a}{a^2 + 1} + \frac{2(1 - a^2)mt}{(a^2 + 1)^2} \\ y = \frac{2nt}{a^2 + 1} \\ z = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} + \frac{4amt}{(a^2 + 1)^2} \end{cases} . \quad (6)$$

Queste equazioni rappresentano una retta dello spazio di coseni direttori

$$\cos \alpha = \frac{(1 - a^2)m}{(1 + a^2)}, \quad \cos \beta = n, \quad \cos \gamma = \frac{2am}{(1 + a^2)}. \quad (7)$$

Infatti, tali espressioni, come è facile provare ricordando che $m^2 + n^2 = 1$, soddisfano

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Si ha per l'appunto

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{(1 + a^4 - 2a^2)}{(1 + a^2)^2} + n^2 + \frac{4a^2m^2}{(1 + a^2)^2} = \\ &= \frac{m^2 + n^2 + 2a^2(m^2 + n^2) + a^4(m^2 + n^2)}{(1 + a^2)^2} = \frac{1 + 2a^2 + a^4}{(1 + a^2)^2} = 1. \end{aligned}$$

Siano ora m_1, n_1, m_2, n_2 i coseni direttori delle tangenti a due curve \mathcal{C}'_1 e \mathcal{C}'_2 che si tagliano in P' . Il relativo angolo σ' è dato da

$$\cos \sigma' = m_1m_2 + n_1n_2.$$

L'angolo formato in P dalle curve \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sulla sfera è dato, per le (7) da

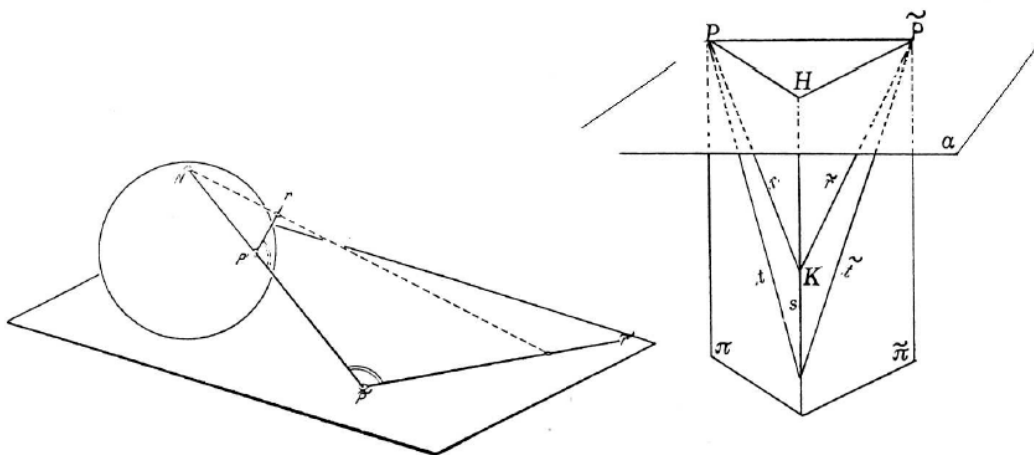
$$\cos \sigma = \frac{(1 - a^2)^2m_1m_2}{(1 + a^2)^2} + n_1n_2 + \frac{4a^2m_1m_2}{(1 + a^2)^2} = m_1n_2 + n_1n_2,$$

come è facile verificare.

Risulta quindi provato che la trasformazione è conforme.

È possibile dare anche una dimostrazione di tipo geometrico del teorema.

Consideriamo la figura proposta. Sia P un punto della sfera, che chiameremo \mathbb{S} , diverso dal polo nord e sia \tilde{P} l'immagine di P tramite la proiezione stereografica. Premettiamo che il piano ν , tangente ad \mathbb{S} nel polo nord, ed il piano π tangente ad \mathbb{S} in P , formano angoli uguali con la retta passante per NP . Inoltre $\nu \cap \pi$ è una retta perpendicolare a NP . Poiché il piano $\tilde{\pi}$ su cui proiettiamo è parallelo a ν , si ha che π e $\tilde{\pi}$ formano angoli uguali con la retta passante per $P\tilde{P}$.



Quindi, chiamando α il piano ortogonale a $s = \pi \cap \tilde{\pi}$ e passante per $P\tilde{P}$, risulta $\widehat{HP\tilde{P}} \cong \widehat{H\tilde{P}P}$.

Se r e \tilde{r} sono due rette ottenute segnando π e $\tilde{\pi}$ con un piano passante per $P\tilde{P}$ si ha anche $\widehat{\tilde{P}PK} \cong \widehat{K\tilde{P}P}$. Da qui segue che se r è una retta tangente a \mathbb{S} in P e \tilde{r} è l'immagine di r secondo la proiezione stereografica, allora r e \tilde{r} formano angoli

uguali con $P\tilde{P}$. Se t è un'altra tangente alla sfera in P e \tilde{t} è la sua immagine, allora $\widehat{rt} \cong \widehat{\tilde{r}\tilde{t}}$. \square

Siamo ora in buona posizione per poter definire un possibile isomorfismo tra il modello di Klein, che chiameremo \mathcal{D}_K , e il disco di Poincaré, che indicheremo con \mathcal{D}_P .

Teorema 0.5. *L'isomorfismo tra il modello di Poincaré e il modello di Klein si può realizzare mediante una proiezione stereografica composta con una proiezione ortogonale nello spazio.*

Dimostrazione. Sia S^2 la sfera di \mathbb{R}^3 di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 1, ossia

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

Sappiamo che la proiezione stereografica del cerchio massimo orizzontale della sfera sul piano $z = 0$ è il disco di Poincaré, avente centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2.

L'idea è quella di proiettare stereograficamente i punti, le rette del disco di Poincaré situato sul piano xy sulla sfera e, nuovamente, tramite una proiezione ortogonale, riproiettare il tutto nel disco di Klein, nel piano $z = 0$.

Chiamiamo

$X(x, y, 0)$ il punto del modello di Klein,

$X'(x, y, 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ il proiettato ortogonalmente sulla semisfera inferiore.

Infine, il punto corrispondente sul piano di Poincaré, ottenuto proiettando stereograficamente X' sul piano $z = 0$, sarà $X''(x'', y'', 0)$, ove x'', y'' verranno ora determinate.

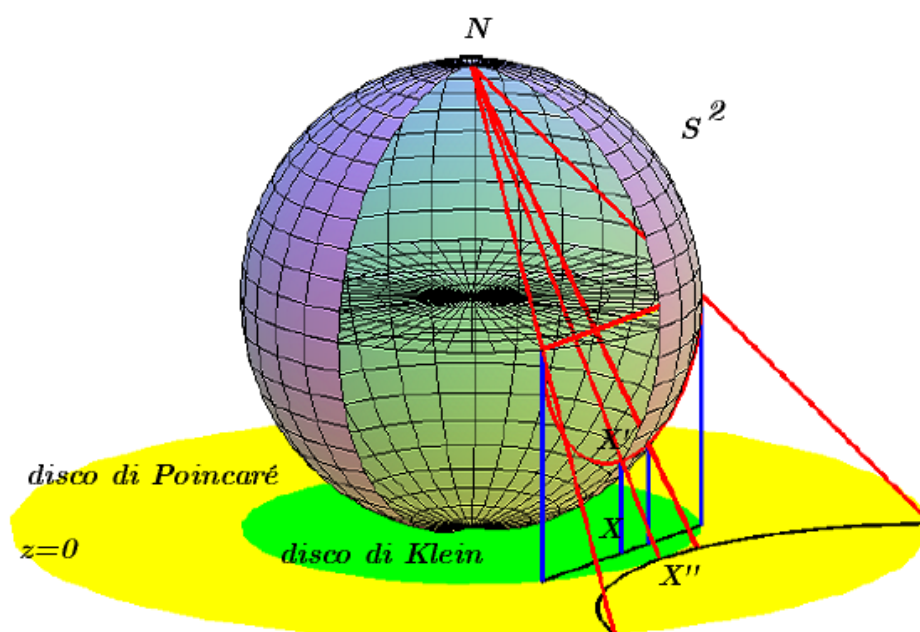
Ripercorrendo i passi seguiti nella ricerca delle equazioni della proiezione stereo-

grafica, si ha, nel nostro caso,

$$\begin{cases} x'' = \frac{2x}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \\ y' = \frac{2y}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \end{cases}$$

Pertanto l'isomorfismo tra modello di Klein e modello di Poincaré è il seguente:

$$\varphi := \begin{cases} \mathcal{D}_K & \longrightarrow & \mathcal{D}_P \\ X : (x, y) & \longmapsto & X'' : \left(\frac{2x}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{2y}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right) \end{cases}$$



È possibile definire anche l'isomorfismo inverso, φ^{-1} ,

$$\varphi^{-1} : \mathcal{D}_P \rightarrow \mathcal{D}_K.$$

Si ottiene facilmente

$$\varphi^{-1} := \begin{cases} \mathcal{D}_P & \longrightarrow & \mathcal{D}_K \\ X'' : (x'', y'') & \longmapsto & X : \left(\frac{4x''}{4 + x''^2 + y''^2}, \frac{4y''}{4 + x''^2 + y''^2} \right) \end{cases}.$$

A questo punto giustifichiamo brevemente la scelta di tali isomorfismi.

La scelta è subito motivata.

Infatti, per quanto visto, la proiezione stereografica conserva gli angoli ed inoltre muta circonferenze o in rette (quest'ultimo caso si verifica se la circonferenza sulla sfera passa per il polo nord N). Dunque la corda passante per X illustrata in figura (retta del modello di Klein) viene mutata dalla proiezione ortogonale in un arco di circonferenza sulla sfera, passante per X' , e tale arco è ortogonale alla circonferenza massima orizzontale (sul piano $z = 1$): infatti, tale arco giace su un piano ortogonale al piano equatoriale della sfera.

La proiezione stereografica muta, a sua volta, quest'arco di circonferenza in un arco di circonferenza passante per X'' e ortogonale al bordo del disco di Poincaré (che, come già osservato, è l'immagine, nella proiezione stereografica, del cerchio massimo orizzontale).

Gli stessi discorsi si possono ovviamente ripetere per la sequenza di trasformazioni inverse che definiscono la φ^{-1} . □